CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNEE 1986

MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE A OPTION M - P

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 9)

——=o0Oo=——

Les deux parties sont totalement indépendantes

On appelle polynôme trigonométrique d'ordre n toute expression de la forme :

$$g(t) = a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kt)$$

où : $a_o , a_1 , \dots , a_n , b_1 , \dots , b_n$ sont des réels et $(a_n , b_n) \neq (0,0)$

Les réels a_i $(i = 0,\dots, n)$ et b_i $(i = 1,\dots, n)$ sont appelés les coefficients du polynôme trigonométrique g.

I - Soit g un polynôme trigonométrique

1) Montrer que :

$g = 0 \Leftrightarrow$ tous les coefficients de g sont nuls

2) Trouver tous les polynômes trigonométriques g tels que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & g(t) = g(-t) \\ & -g(t) = g(t+\pi) \end{cases}$$

Quelle est la parité de l'ordre n du polynôme g ?

On supposera désormais cette condition réalisée dans la suite du I.

3) Soit la droite D_t d'équation :

$$x \cos t + y \sin t - g(t) = 0$$

relativement à une base orthonormée du plan euclidien orienté.

Déterminer les équations paramétriques de l'enveloppe Γ de la famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et préciser ses symétries.

4) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad [g(t)]^2 + [g(t + \tfrac{\pi}{2})]^2 = \lambda^2 \quad (1)$$

a) Soit f la fonction rationnelle telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(e^{it}) = g(t) + (-1)^{k-1} ig(t + \tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{où } n = 2k + 1$$

Calculer : $f(u)\, f(u^{-1})$ pour $u \in \mathbb{C}^*$

b) Montrer que f est un polynôme ; puis, en considérant un équivalent de $|f(u)|$ lorsque $|u|$ tend vers $+\infty$, montrer que :

$$g(t) = a_{2k+1} \cos((2k+1)t) \text{ avec : } a_{2k+1} = \pm\lambda$$

5) Soient D_t et $D_{t+\frac{\pi}{2}}$ deux droites de la famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$. On désigne par M_t et $M_{t+\frac{\pi}{2}}$ leurs points respectifs de contact avec Γ.

a) Déterminer les coordonnées de leur intersection Q_t.

b) Que peut-on dire de l'ensemble des points Q_t pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque la condition (1) est réalisée ? Y a-t-il équivalence ?

6) Soit Γ_s l'enveloppe des droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'équations :

$$x \cos t + y \sin t - \cos(5t) = 0$$

a) Tracer Γ_s.

b) Montrer que Γ_s est inscrite dans un cercle que l'on précisera et est tangente à un cercle que l'on déterminera aussi.

Déterminer les nombres de points de contact avec ces deux cercles.

c) Préciser l'ensemble des points d'intersection des couples de droites (Δ,Δ') tangentes à Γ_s et telles que Δ et Δ' sont perpendiculaires

II - 1) a) Montrer que si g est un polynôme trigonométrique $\exists G \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = e^{-int} G(e^{it}) \text{ où}$$

G est un polynôme de degré 2n.

b) Montrer que le polynôme G ainsi défini vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad G(z) = z^{2n} \overline{G}(z^{-1})$$

où, si $G(z) = \alpha_o + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{2n} z^{2n}$

$$\overline{G}(z) = \overline{\alpha_o} + \overline{\alpha_1} z + \dots + \overline{\alpha}_{2n} z^{2n}$$

2) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} / \ 0 < |z| < 1\}$

Montrer que, si $z_o \in D$ est racine de G, alors $\overline{z_o^{-1}}$ l'est aussi, et qu'ils sont de même multiplicité.

T.S.V.P.

3) On suppose que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) > 0$

Montrer, en considérant la décomposition de G dans $\mathbb{C}[X]$, qu'il existe un polynôme $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall \ t \in \mathbb{R} \quad g(t) = |h\ (e^{it})|^2$$

4) Montrer que si g ne contient que des termes de la forme $(a_k \cos kt)$ et si : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) > 0$, il existe un polynôme à coefficients réels h tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad g(t) = |h\ (e^{it})|^2$$

5) On suppose désormais les conditions du 3) réalisées.

a) Montrer, en calculant $\int_0^{2\pi} g(t)\, dt$, que :

$$\text{si } h(z) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j z^j \ , \quad \sum_{j=0}^{n} |\beta_j|^2 = a_o$$

b) Montrer que, $\forall\ (c_o, c_1, \ldots, c_n, d_o, d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} c_i d_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n} d_i^2\right)$$

c) Montrer que, $\forall (c_o, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)^2 \leq (n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} c_i^2\right)$$

d) On suppose, qu'en plus des conditions du 3), on a : $a_o = 1$

Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) \leq n+1$

e) A quelle condition sur h, g atteint-il cette valeur ? Calculer g.